Zählratenstatistik

Totzeiten, Signalabstandsverteilungen

März 1995 K. Huber, Strahlenzentrum Univ. Gießen
Version 04.Jun.2009

1 Einleitung

.....

2 Poisson-Verteilung

Bei den folgenden Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass die Ereignisraten Poisson-verteilt sind. Die Poisson-Verteilung wird in der folgenden Form benutzt:

Wahrscheinlichkeit P[n] für das Eintreffen von genau n Ereignissen im Zeitintervall [0,t]

```
P[n](R,t) = (R*t)^n / n! * e^-(R*t)
   t: Zeit > 0
   R: Ereignisrate > 0
   n: 0,1,...,~

Sum[n=0,~]P[n]     = e^+(R*t) * e^-(R*t) = 1
Sum[n=0,~](n*P[n]) = R*t * Sum[n=0,~]P[n] = R*t
P[n+1]             = R*t / (n+1) * P[n]
dP[n]/dt           = R * (P[n-1] - P[n])
Int(P[n])dt        = -1/R * Sum[i=0,n]P[i]
Int[0,~]P[n]dt     = 1/R
```

2.1 Abstandsverteilungen für Poisson-verteilte Signale

Die Änderung von P[0] zur Zeit t ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des ersten Ereignisses seit t=0. Legt man t=0 auf den Zeitpunkt des vorausgegangenen Ereignisses, was man ohne Einschränkung tun kann, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Abstandes t. P[0] wird um die Wahrscheinlichkeit kleiner, mit der das Ereingnis zur Zeit t eintrifft.

Die Änderung von P[1] enthält zwei Komponenten (s.o.): zum Einen muss es um den Anteil wachsen, den P[0] verloren hat, und zum Andern verliert es durch die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines zweiten Ereignisses. Der zweite Anteil gibt uns die Abstandsverteilung des zweiten Ereignisses vom Startereignis.

```
dP[0]/dt = R * (0  - P[0])
dP[1]/dt = R * (P[0] - P[1])
       ...
dP[n]/dt = R * (P[n-1] - P[n])
```

Die Abstandsverteilung A[n] der n-ten Ereignisse nach einem Startereignis ist daher:

```
A[n] = R * P[n-1]
Int[0,~](A[n])dt = 1
```

Von besonderem Interesse ist A[1], die Abstandsverteilung zwischen zwei benachbarten Ereignissen:

```
A[1] = R * P[0] = R * e^-(R*t)
```

Für Poisson-verteilte Signale ist es eine abfallende Exponentialfunktion, die, da sie in logarithmischer Darstellung eine Gerade ergibt, bequem zur Diagnose von experimentellen Störungen wie Totzeiten oder Nachimpulsen dienen kann.

2.2 Totzeitverluste für Poisson-verteilte Signale

2.2.1 Totzeitkorrekturrechnung für nicht-paralysierende Totzeit

Ereignisse, die in eine Totzeit fallen, tragen selber nicht zur Totzeit bei.

```
v = R*T  Totzeitverluste v im Totzeitintervall T bei Poisson-verteilter
         Eingangsrate R
S = r*T  gesamte Totzeit S pro Sekunde bei der Bedienrate r
V = R*S  Rate der Totzeitverluste V
R = r + V = r + R*r*T  Bilanz der Raten
R = r / (1 - r*T)  Totzeitkorrektur
r = R / (1 + R*T)  inverse Totzeitkorrektur
```

Die erste Gleichung ist nur für poisson-verteilte Eingangsraten richtig. Bei periodischer Eingangsrate und R*T < 1 würden keine Totzeitverluste auftreten. Diese Gleichung ist deshalb auch direkt aus der Poisson-Verteilung herzuleiten:

```
v = 1*P[1] + 2*P[2] + ... + n*P[n] + ...
  = R*T*P[0] + R*T*P[1] + ... + R*T*P[n-1] + ...
  = R*T
```

2.2.2 Signalabstandsverteilung nach nicht-paralysierender Totzeit

Nach den vorausgegangenen Überlegungen kann man den Zeitnullpunkt für die Abstandsmessung beliebig legen und erhält für Poisson-verteilte Ereignisse immer die gleiche Abstandsverteilung. Das erste nach einer vorausgegangenen Totzeit auftretende Ereignis hat deshalb von dem Totzeit auslösenden Ereignis die gewohnte Abstandsverteilung P[0] verschoben um die Totzeit T und vermindert um die Totzeitverluste in T.

```
A[1,T] = U(t-T) * r * P[0](t-T) = U(t-T) * R / (1 + R*T) * P[0](t-T)
U(t) = 0 für t<0;  1 für t>=0;  (Sprungfunktion)
```

2.2.3 Totzeitkorrekturrechnung für paralysierende Totzeit

Ereignisse, die in eine Totzeit fallen, verlängern die Totzeit durch das Starten eines neuen Totzeitintervalls.

```
A = R * e^-(R*t)  Abstandsverteilung der Ereignisse bei Eingangsrate R
w = R * Int[T,~](e^-(R*t))dt
  = e^-(R*T)      Wahrsch. w für Abstand größer Totzeit T
r = R * e^-(R*T)  gemessene Rate, max für R*T=1
R = ???  Totzeitkorrektur nur numerisch lösbar, oder für RT<<1
 näherungsweise durch Reihenentwicklung
```

2.2.4 Signalabstandsverteilung nach paralysierender Totzeit

Diese Nuss ist noch zu knacken!

2.2.5 Tabelle Totzeitverluste

Tab.: rel. Totzeitverluste:

R*T	!paralys	paralys
0.00	0.000	0.000
0.10	0.091	0.095
0.20	0.167	0.181

0.30	0.231	0.259
0.40	0.286	0.330
0.50	0.333	0.393
0.60	0.375	0.451
0.80	0.444	0.551
1.00	0.500	0.632
1.50	0.600	0.777
2.00	0.667	0.865
2.50	0.714	0.918
3.00	0.750	0.950
4.00	0.800	0.982
5.00	0.833	0.993
6.00	0.857	0.998
8.00	0.889	1.000
10.00	0.909	1.000

2.2.6 Hinweise

Achtung:
Wie man sich leicht überlegen kann ist die nicht-paralysierende Totzeit nicht geeignet zum Abschneiden von z.B. Nachimpulsen eines Detektors, da nach wie vor beliebig kurze Ereignisabstände auftreten. Die paralysierende Totzeit hingegen entfernt alle Ereignisse, die zu ihrem Vorgänger einen kürzeren Abstand haben als die Totzeit.

Die folgenden Betrachtungen setzen stets eine feste, nicht-paralysierende Totzeit voraus!

3 Kaskadierte Zähler

Einige der (Eigenbau-) Datenerfassungsgeräte liefern über einen Ausgang einen Zählimpuls für jeden Totzeitverlust. Da ein nachgeschalteter Zähler jedoch ebenfalls eine Totzeit hat, gehen dort wiederum Ereignisse verloren, die man mit einem weiteren Zähler registrieren könnte usw.. Prinzipiell sollte jedoch aus den ersten beiden Raten die Originalrate berechenbar sein, falls die Totzeiten gleich sind und die Originalrate konstant ist.

Die Zählrate Z[0] und die Totzeitverluste V[0] der ersten Datenerfassung mit Totzeit T[0] sind

```
Z[0] = R/(1 + R*T[0])

V[0] = R - Z[0]
     = R * R*T[0]/(1 + R*T[0])
```

Die zweite Datenerfassung erhält die gleiche primäre Datenrate R, jedoch um die V[0]/R verkürzte Zeit

```
Z[1] = R/(1 + R*T[1]) * V[0]/R
     = R/(1 + R*T[1]) * R*T[0]/(1 + R*T[0])

V[1] = V[0] - Z[1]
     = R * R*T[0]/(1 + R*T[0]) * R*T[1]/(1 + R*T[1])
```

usw...

```
Z[n] = R/(1 + R*T[n]) * V[n-1]/R
     = 1/T[n] * Prod[i=0,n](R*T[i]/(1 + R*T[i]))
     = Z[n-1] * T[n-1]/T[n] * R*T[n]/(1 + R*T[n])

V[n] = V[n-1] - Z[n]
     = R - Sum[i=0,n]Z[i]
     = R * Prod[i=0,n](R*T[i]/(1 + R*T[i]))
     = V[n-1] * R*T[n]/(1 + R*T[n])

V[n]/Z[n] = R*T[n]

V[n]/R = Prod[i=0,n](R*T[i]/(1 + R*T[i]))

V[~] = 0
-> R = Sum[i=0,~]Z[i]
```

Für den Fall T[0]=T[1]=T genügen Z[0] und Z[1] zur Berechnung von V[1], R und T

```
R    = Z[0]^2 / (Z[0] - Z[1])
     = Z[0] + Z[1] * Sum[i=0,~]((Z[1]/Z[0])^i)

V[1] = Z[1]^2 / (Z[0] - Z[1])

T    = Z[1] / Z[0]^2
```

Für den Fall T[0], T[1]=T[2]=T benötigt man Z[0], Z[1] und Z[2] zur Berechnung von R, V[2], T[0] und T

```
R    = Z[0] + Z[1]^2 / (Z[1] - Z[2])
     = Z[0] + Z[1] + Z[2] * Sum[i=0,~]((Z[2]/Z[1])^i)

V[2] = Z[2]^2 / (Z[1] - Z[2])

T[0] = Z[1]^2 / (Z[0]^2 * (Z[1] - Z[2]) + Z[0]*Z[1]^2)
T    = Z[2] / (Z[0] * (Z[1] - Z[2]) + Z[1]^2)
```

4 Vorgeschaltete Untersetzer

Bei zu hohen Zählraten ist zur Vermeidung von Totzeitverlusten die Vorschaltung eines schnellen Untersetzers zu empfehlen (z.B. 1/10, 50MHz). Dies hat zum einen den Effekt, dass die zu übertragende Rate reduziert wird und zum anderen, dass die statistischen Schwankungen der Zählrate herabgesetzt werden, wodurch sich ebenfalls die Totzeitverluste reduzieren.

```
R       Originalrate, Poisson-verteilt
Ru      untersetzte Rate
U >1    Untersetzungsverhältnis
S <U    systematischer Fehler durch Untersetzung
F(R)    statistischer Fehler von R

R= U * Ru + S

F(R)= SQRT(R)= SQRT(U*Ru+S)

F(Ru)= F(R)/U= SQRT(U*Ru+S)/U= SQRT(Ru+S/U) / SQRT(U)

für S<<R und 1<<Ru:     F(Ru)~~ SQRT(Ru/U)
```

Bei der Auswertung ist zu beachten, dass der statistische Fehler nicht mehr wie gewohnt durch SQRT(Ru) gegeben ist. Additiv hinzu kommt ein systematischer Fehler S < U, der daher rührt, dass der Untersetzer jeweils U Ereignisse sammeln muss bevor ein Übertrag erscheint.

4.1 Verteilung der untersetzten Datenrate

Nach Durchlaufen eines 1/u - Untersetzters geht die Datenrate R in eine Rate Ru = R/u über, die keine Poisson-Verteilung mehr hat. Da jeweils erst nach u Eingangsereignissen ein Ereignis am Ausgang erscheint, ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von n Ereignissen am Ausgang bis zur Zeit t

```
U[n] = P[m] = (R*t)^m / m! * e^-(R*t)  mit m = u * n
```

4.2 Totzeitverlustrechnung für die untersetzte Datenrate

In einer dem Untersetzer nachfolgenden nicht-paralysierenden Totzeit T gehen

```
V(u,R) = Sum[n=1,~](n * U[n])
       = Sum[n=1,~](n * (R*T)^m / m! * e^-(R*T))
```

Ereignisse verloren.

speziell:

```
V(u=1,R)   = Sum[n=1,~](n * P[n])
           = Sum[n=1,~](R*T * P[n-1])
           = (R*T) * Sum[n=0,~](P[n])
           = (R*T)

V(u=1,R/u) = (R*T)/u
```

Da für

```
V(u,R)     = (R*T)/u * Sum[n=1,~]((R*T)^(m-1) / (m-1)! * e^-(R*T))
```

nur die höheren Glieder m = u-1, 2u-1,... der e^(R*T) Reihe einen Beitrag leisten, beschränken wir uns für (R*T)<1 und u>4 auf den Term n=1:

```
V(u,R,n=1) = (R*T)/u * (R*T)^(u-1) / (u-1)! * e^-(R*T))
           = (R*T) * (R*T)^(u-1) / u! * e^-(R*T))
```

Die Totzeitverluste werden im Vergleich zur Eingangsrate R um mehr als 1/u! reduziert und werden z.B. bei einer 1/10-Untersetzung (1/10! = 2.8*10^-7) völlig venachlässigbar. Im Vergleich zu einer Eingangsrate R/u werden sie um mehr als 1/(u-1)! reduziert.

4.3 Abstandsverteilung der untersetzten Datenrate

Bei einem u-fachen Untersetzer ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des u-ten Ereignisses von Interesse, da nur jedes u-te Ereignis am Ausgang erscheint. Wie oben gezeigt ist die Abstandsverteilung A[u] der u-ten Ereignisse bei der Eingangsrate R:

```
A[u]     = R * P[u-1]
```

Mittelwerte von A[u]:

```
M(A[u]) = Int[0,~](t * A[u])dt / Int[0,~](A[u])dt
    = u/R * Int[0,~](A[u]+1)dt
    = u/R  (war ja zu erwarten)

M(A[u]^2) = Int[0,~](t^2 * A[u])dt / Int[0,~](A[u])dt
      = u * (u + 1) / R^2 * Int[0,~](A[u]+2)dt
      = u * (u + 1) / R^2
```

Streuung um den Mittelwert:

```
S[u](R) = (A[u] - [M(A[u]))^2 = M(A[u]^2) - M(A[u])^2 = u / R^2
```

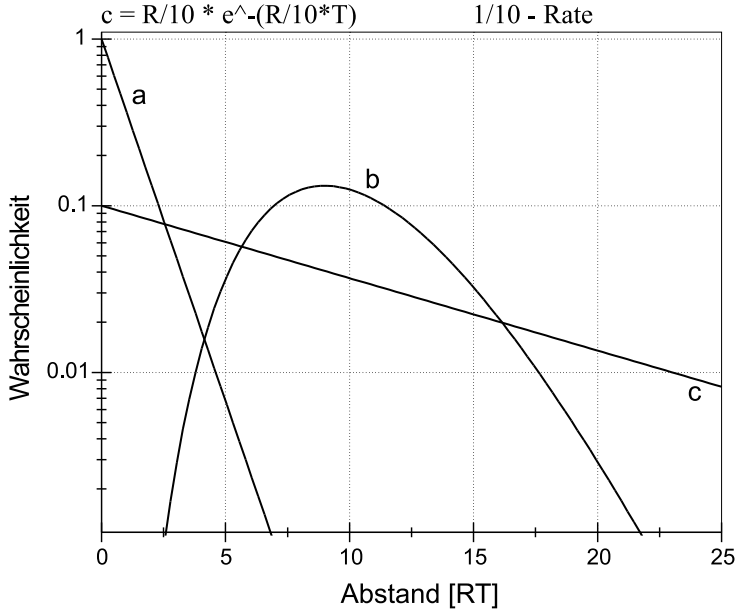
Die Streuung einer Poisson-verteilten gleichen Rate R/u hingegen ist

```
S[1](R/u) = u^2 / R^2,
```

also das u-fache. Die "statistischen Spitzen" werden geglättet.

Abb. Abstandsverteilungen

a = R*e^-(R*T) Original-Rate
b = R * (R*T)^9 / 9! * e^-(R*T) 10-fach Untersetzung
c = R/10 * e^-(R/10*T) 1/10 - Rate



5 Fifo-Speicher

Sobald ganze Datenworte mit einem Ereignis verbunden sind können vorgeschaltete Untersetzer oder Zählerkaskaden nicht benutzt werden zur Vermeidung von Totzeitverlusten. Hier können dann Fifo-Speicher weiterhelfen.

Dies ist der nicht ganz überzeugende Versuch das Problem als Markov-System bzw. Markov-Kette zu betrachten. Aber die Ergebnisse scheinen zu stimmen.(?)

Markov-Ketten-Modell für einen Fifo:

```
.--> /----\ -----l----> /----\ -----l----> /----\ ---.
m    |S(0)|             |S(1)|             |S(M)|    l
'--- \----/ <----m----- \----/ <----m----- \----/ <--'
S(n): Besetzungswahrscheinlichkeit für Zustand mit n
Ereignissen im Fifo
S(0): Fifo ist leer
S(m): Fifo ist voll
l,m: Übergangswahrscheinlichkeiten
l: Einströmung
m: Bedienung
```

Ein Zustand S(n) wird zerstört mit der Wahrscheinlichkeit

```
(l + m) * S(n)
```

Und er wird aus den Nachbarn erzeugt mit der Wahrscheinlichkeit

```
m * S(0) + m * S(1)       (n=0)
l * S(n-1) + m * S(n+1)
l * S(M-1) + l * S(M)     (n=M)
```

Das System ist im Gleichgewicht, wenn beide Wahrscheinlichkeiten gleich sind

```
l * S(0)       = m * S(1)
(l + m) * S(n) = l * S(n-1) + m * S(n+1)
m * S(M)       = l * S(M-1)
```

Durch rekursives Einsetzen erhält man für die Besetzungswahrscheinlichkeiten S(n)

```
S(1) = (l/m)^1 * S(0)
S(2) = (l/m)^2 * S(0)
...
S(n) = (l/m)^n * S(0)
```

Für einen Fifo der Tiefe M gilt außerdem

```
Sum[n=0,M]S(n) = 1 = Sum[n=0,M]<(l/m)^n * S(0)>
S(0) = 1 / Sum[n=0,M]<(l/m)^n>
     = (1 - l/m) / (1 - (l/m)^(M+1))   l/m != 1
     = 1 / (M + 1)                     l/m = 1
```

und damit

```
S(n) = (l/m)^n * (1 - l/m) / (1 - (l/m)^(M+1))   l/m != 1
     = 1 / (M + 1)                               l/m = 1
```

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fifo belegt ist, ergibt sich dann zu

```
S(M) = (l/m)^M * (1 - l/m) / (1 - (l/m)^(M+1))   l/m != 1
```

```
        = 1 / (M + 1)                                   l/m = 1
```

und die Rate der Verluste zu

```
V = S(M) * l
```

Für l/m << 1 kann man abschätzen

```
S(M) ~ (l/m)^M
```

Bleibt noch die Frage, wie die Übergangswahrscheinlichkeiten l und m zu verstehen sind. Setzt man

```
l = R    Ereignisrate
m = 1/T  Bedienung mit Totzeit T (Bedienrate)
```

so erhält man einleuchtende Ergebnisse für einige überprüfbare Fälle (M=1, M=~, R*T<<1, R*T=1), obwohl dies nicht den Markov-Vorausetztungen (zufällige Ereignisse, die Vergangenheit hat keinen Einfluss) entspricht. Insbesondere ist die Bedienung eine direkte Folge eines vorausgegangenen Ereignisses und nicht zufällig.

Die Übergangswahrscheinlichkeit l kann man sich aus der Poisson-Verteilung der Ereignisrate als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des ersten Ereignisses "gleich jetzt" (t=0) folgendermaßen ableiten:

```
d(P[1]) / dt [t=0]   = R
d(P[n>1]) / dt [t=0] = 0
```

Für die Bedienrate mit Totzeit T geht das so nicht. Es gibt Rechnungen mit "negativ exponentieller" Bedienrate. Da soll das analog funktionieren:

```
B = 1 - e^-(t/T)   (???)
d(B) / dt [t=0]   = 1/T
```

Haben wir aber nicht!

Wenn sowohl Ereignisrate als auch Bedienrate periodisch wären, so hätte man für R*T<1 garkeine Totzeitverluste zu erwarten. Mit einer zufälligen Ereignisrate scheint es aber noch zu funktionieren. Der Unterschied ist in der Formel für die Totzeitverluste

```
V = R * S(M)
```

zu berücksichtigen, die so nur richtig ist für eine zufällige Ereignisrate. Bei periodischen Ereignissen mit R*T<1 wäre die vorausgegangene Bedienung bereits beendet, wenn das nächste Ereignis eintrifft. Zufällige Ereignisse scheinen die Vergangenheit ausreichend abzukoppeln.

Beispiel:
Für ein Gerät mit Totzeit T und einem Datenregister (M = 1) sind die Totzeitverluste bei einer Rate R

```
V = R * S(M) = R*R*T / (1 + R*T)
```

Das gleiche Ergebnis erhält man mit der üblichen Totzeitrechnung (s.o.).

Ergebnis:
Ein Fifo kann die Totzeitverluste erheblich vermindern.

```
V ~ R * (R/T)^M       R*T << 1
V = R / (M + 1)       R*T = 1
```

Für R*T << 1 genügt bereits ein Fifo mit wenigen Speicherplätzen.
Für R*T = 1 können die Verluste mit einem M = 100 Fifo auf 1% begrenzt werden.

Das Fifo auf der Rechneranpassung ist mit M = 2048 deutlich größer gewählt, da es mögliche Unterbrechungen bei der Datenverarbeitung durch den Rechner überbrücken muss:

```
z.B.: M / R = 2000 / 100kHz = 20ms
```

6 Lifetime-Messung

Bei unbekannter bzw. variabler Totzeit eines Datenerfassungsgerätes oder wechselnder Ereignisrate ist es i.a. nicht möglich im Nachhinein eine Totzeitkorrekturrechnung durchzuführen. Deshalb bietet das Data-Routing zwei Möglichkeiten zur direkten Messung von Totzeiten an.

Lifetime-Messung mit der IFS-Karte

Lifetime-Messung mit der Zähler/Uhr-Karte